Vollständige Diskussion einer gebrochenrationalen Funktion am Beispiel $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$

Definitionsbereich

$D_f=\Re\setminus\{0\}$ (Funktion ist nicht für alle x definiert, Division durch Null)

Symmetrieeigenschaften

$f(-x)=\frac{2(-x)-1}{(-x)^2}=\frac{-2x-1}{(-1)^2x^2}=\frac{-2x-1}{x^2}\neq f(x)$ (Achsensymmetrie) und $f(-x)\neq -f(x)$ (Punktsymmetrie). Die Funktion ist nicht symmetrisch.

Verhalten im Unendlichen

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}=0$ Da höchste Potenz n im Zähler kleiner ist als die höchste Potenz m im Nenner, ist y = 0 die Asymptote, ansonsten Polynomdivision.

Stetigkeit/ Unstetigkeit

Nur für x = 0 ist der Zähler von 0 verschieden und der Nenner gleich 0.

Folge h_n mit $n\to\infty$ strebt $h\to 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2h_n-1}{h_n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}2h_n-1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{h_n^2}=-\infty$, analog auch für die linke Seite der Asymptote.

Damit ist x_1= 0 Polstelle der Funktion und damit nicht stetig.

Nullstellen

$0=f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$, ein Quotient wird „Null“ wenn der Zähler 0 ist und der Nenner ungleich 0.

$2x-1=0$, damit ist $x_2=\frac{1}{2}$ Nullstelle, weil $\left(\frac{1}{2}\right)^2\neq 0$.

$P_1(0{,}5|0)$ ist Schnittpunkt mit der x-Achse.

Schnittpunkte mit der y-Achse

$f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0^2}$ gehört nicht zum Definitionsbereich. Es gibt keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Lokale Extremstellen

Erste Ableitung: $f'(x)=\frac{2x^2-(2x-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x^2-4x^2+2x}{x^4}=\frac{x(-2x+2)}{x^4}=\frac{-2x+2}{x^3}$

Ableitung Null setzen: $-2x+2=0$, damit ist $x_3 = 1$; $1^3 \neq 0$

Zweite Ableitung finden: $\frac{-2x^3-(2-2x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-2x^3-6x^2+6x^3}{x^6}=\frac{4x-6}{x^4}$

Einsetzen von x_3: $f''(1)=-2<0$, damit Maximum bei $P_2(1|1)$.

Wendepunkt

Zweite Ableitung 0 setzen: $f''(x)=\frac{4x-6}{x^4}$; $4x - 6 = 0$ mit $x_4=\frac{3}{2}$ und $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \neq 0$.

Wendepunkt $P_3(1.5|8/9)$

Anstieg der Tangente, Wendestelle in erste Ableitung einsetzen: $m=\frac{-2\cdot 1.5+2}{(1.5)^3}=-\frac{8}{27}$

$y=mx+n=\frac{8}{9}=-\frac{8}{27}\cdot\frac{3}{2}+n$; $n=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$

Wendetangentengleichung: $y=-\frac{8}{27}x+\frac{4}{3}$

Graph